תורת הקבוצות, תרגיל 12

1. יהי $n \in \mathcal{N}$ ותהי $P_n = \{k \in N : k|n\}$, היכן ש- $k|n$ פירושו ש-k מחלק את n. נגדיר על P_n יחס סדר חלקי R בצורה הבאה: aRb אם ורק אם $a|b$.
   א. הוכח, כי R הוא אכן יחס סדר חלקי.
   ב. מצא תנאי הכרחי ומספיק לכך שיחס הסדר יהיה שלם (כלומר, שכל שני איברים יהיו ניתנים להשוואה).

2. תהיינה A, B קבוצות סדורות חלקית.
   א. הוכח, כי אם A איזומורפית ל- B ויש ב- A איבר מקסימלי אז גם ב- B יש איבר מקסימלי.
   ב. נניח שקיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל ושומרת סדר. האם נובע מכך ש- A איזומורפית ל- B?

3. תהי A קבוצה כלשהי. הקבוצה $P(A)$ עם יחס ההכלה הינה קבוצה סדורה חלקית.
   א. הוכח, כי לכל תת קבוצה ב- $P(A)$ יש חסם עליון (סופרמום).
   ב. עבור $A = \mathcal{N}$, מצא תת קבוצה של $P(A)$ שאין לה איבר מקסימלי.

4. תהי A סדורה שלם ונניח ש- $A = B \cup C$ כך ש- B, C הינן קבוצות סדורות היטב עם היחס המושרה מהיחס של A. הוכח, כי A הינה סדורה היטב.

5. תהי A קבוצה סדורה היטב ותהי $B \subseteq A$ חסומה מלעיל. הוכח או הפרך:
   א. ל- B קיים בהכרח חסם עליון ב- A.
   ב. ל- B קיים בהכרח איבר מקסימלי.

תאריך ההגשה: 12.1.2005